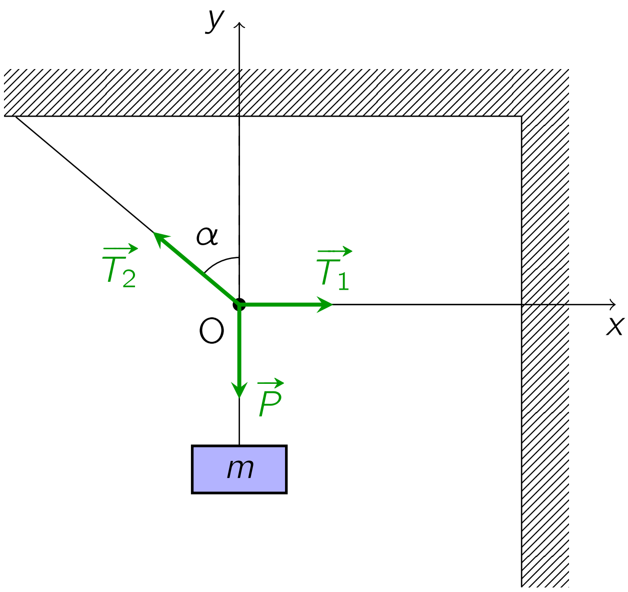
Corrigé des exercices sur l'équilibre de translation

Exercice 1

Considérons l'équilibre de translation du point O. Les forces qui s'y appliquent sont les tensions des deux cordes $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ ainsi que le poids $\overrightarrow{P}$ du corps qui y est attaché.

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$$



Projetons cette égalité sur les axes Ox (1) respectivement Oy (2) :

$$T_1 - T_2 \sin\alpha = 0 \tag{1}$$
$$T_2 \cos\alpha - P = 0 \tag{2}$$

On peut déduire T_2 de (1), puis remplacer son expression dans (2) :

$$T_2 = \frac{T_1}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1}{\sin\alpha}\cos\alpha - P = 0$$

On remplace $P = mg$, et on en déduit la masse du corps suspendu m :

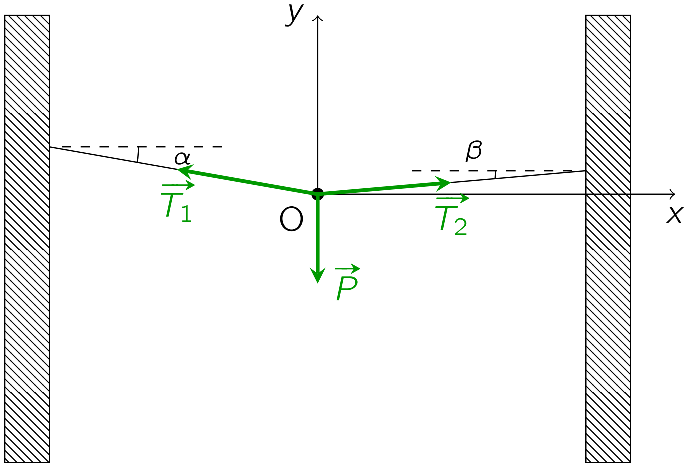
$$m = \frac{T_1}{g\tan\alpha}$$

A.N. : $\quad m = 2{,}57\,\mathrm{kg}$

Exercice 2

Considérons le point O où le garçon s'attache et qui est en équilibre sous l'action de trois forces : les tensions $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ des fils et le poids $\vec{P}$ du garçon.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$$



Projetons la relation d'équilibre sur les deux axes de notre repère :

$$-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0 \tag{3}$$
$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta - P = 0 \tag{4}$$

D'après (3), T_1 s'exprime de la façon suivante :

$$T_1 = \frac{T_2 \cos\beta}{\cos\alpha} \tag{5}$$

Remplaçons cette expression dans (4) :

$$\begin{aligned} & \frac{T_2 \cos\beta}{\cos\alpha} \sin\alpha + T_2 \sin\beta - P = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & T_2 \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \sin\alpha + \sin\beta \right) = mg \\ \Leftrightarrow \quad & T_2 = \frac{mg}{\tan\alpha \cos\beta + \sin\beta} \end{aligned}$$

A.N. : $\quad T_2 = 2240\,\mathrm{N}$

En remplaçant dans (5), nous trouvons $T_1 = 2266\,\mathrm{N}$.

Exercice 3

On va considérer l'un après l'autre les équilibres du point A, respectivement B. Dans chaque cas, on choisira l'axe des x horizontal et vers la droite, et l'axe des y vertical et vers le haut.

En projetant la condition d'équilibre pour le point A sur les axes, nous obtenons :

$$-T_1 + T_2 \sin\alpha = 0 \tag{6}$$
$$T_2 \cos\alpha - P = 0 \tag{7}$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve $T_1 = 36{,}6\,\mathrm{N}$ et $T_2 = 86{,}6\,\mathrm{N}$.

La corde reliant A et B est en équilibre, et vu le principe des actions réciproques, cette corde va exercer une force au point B qui est de même intensité mais de sens opposé à $\overrightarrow{T_2}$. En projetant de nouveau les différentes forces appliquées en B sur les deux axes, nous trouvons :

$$-T_3 + T_4 \sin\beta - T_2 \sin\alpha = 0 \tag{8}$$
$$T_4 \cos\beta - T_2 \cos\alpha = 0 \tag{9}$$

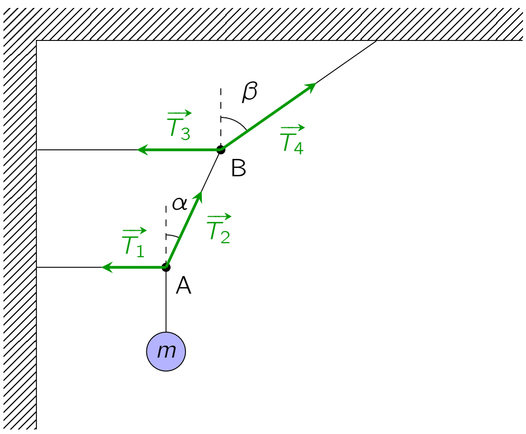
Remarquons que d'après (7), $T_2 \cos\alpha = P$, ce qui nous permet de trouver facilement T_4. En résolvant ce système d'équations, on trouve finalement $T_3 = 75{,}5\,\mathrm{N}$ et $T_4 = 136{,}8\,\mathrm{N}$.

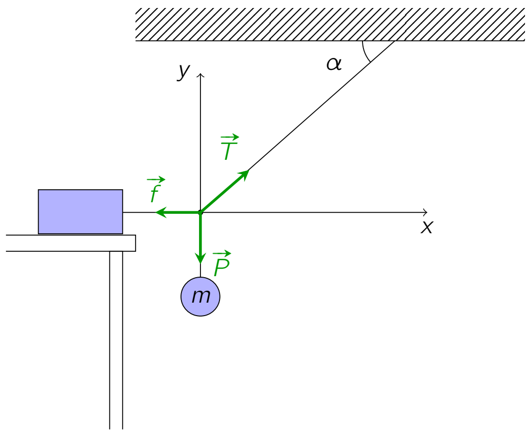
Exercice 4

Choisissons l'axe des x horizontal et vers la droite et l'axe des y vertical vers le haut. Notons $\vec{T}$ la tension dans le câble et $\vec{f}$ la force de frottement qui retient le bloc sur la table. En projetant la condition d'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur les axes indiqués, nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha &= f \\ T\sin\alpha &= P \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = \frac{P}{f} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{f\tan\alpha}{g}$$

A.N. $\quad m = 0{,}706\,\mathrm{kg}$





Exercice 5

Une boule de masse $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ est fixée le long d'un plan incliné via un ressort de raideur $k = 150\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. De combien s'allonge le ressort si le plan incliné forme un angle $\alpha = 35°$ avec l'horizontale ?

La boule est en équilibre sous l'action de 3 forces : la réaction du plan $\vec{R}$, le poids $\vec{P}$ et la tension du ressort $\vec{F}$. La projection du poids sur un axe parallèle au plan incliné et dirigé vers le bas nous donne : $P_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$. Cette composante du poids est compensée par la tension du ressort, qui est donnée par la loi de Hooke : $F = k \cdot x$. Cela nous donne pour l'allongement x du ressort :

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{k}$$

A.N. : $\quad x = 9{,}4\,\mathrm{cm}$