Mécanique : dynamique

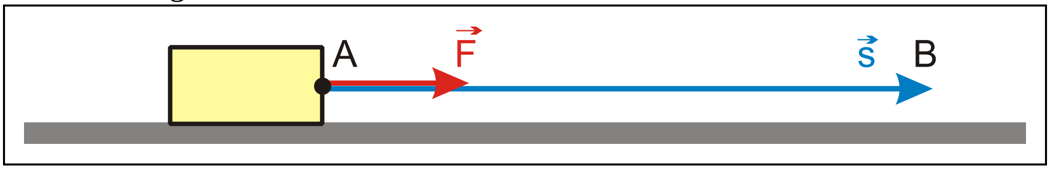
Les effets des forces et les modifications mécaniques des systèmes sont souvent décrits à l'aide du concept de l'énergie mécanique. Or, les transmissions d'énergie mécanique proviennent des travaux des forces qui agissent.

Chapitre 6 : Travail et puissance d'une force

1. Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne

a) Force parallèle au déplacement

Déplacement rectiligne : $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$



Travail de $\vec{F}$ = W($\vec{F}$) : $\left\{\begin{array}{l} W(\vec{F}) \sim F \text{ pour s=constant} \\ W(\vec{F}) \sim s \text{ pour F=constant} \end{array}\right\} \Rightarrow W(\vec{F}) \sim F \cdot s$

L'unité pour W($\vec{F}$) est choisie tel que la constante de proportionnalité soit égale à 1!

Le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit donc : $W(\vec{F}) = F \cdot s$

b) Force perpendiculaire au déplacement

$\vec{F}$ n'agit pas suivant le déplacement $\Rightarrow$ $\vec{F}$ n'influence pas le mouvement

$\Rightarrow$ Le travail de la force $\vec{F}$ est nul : $W(\vec{F}) = 0$.

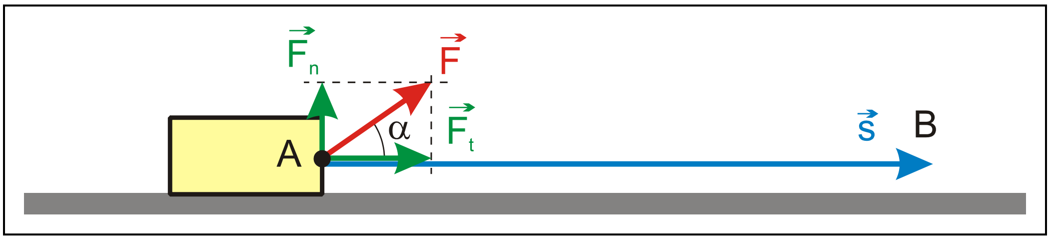
c) Force quelconque

α = angle entre $\vec{F}$ et $\vec{s}$.

On décompose $\vec{F}$ en $\vec{F}_t$ (composante tangentielle au déplacement) et en $\vec{F}_n$ (composante normale au déplacement).

Donc : $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n \Rightarrow W(\vec{F}) = W(\vec{F}_t) + W(\vec{F}_n)$.

Or : $W(\vec{F}_t) = F_t \cdot s = F \cdot \cos\alpha \cdot s$ et : $W(\vec{F}_n) = 0$.



Finalement, le travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $\vec{s}$ vaut :

$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

On retrouve que si $\alpha = 0$, alors $W = F \cdot s$, et si $\alpha = 90°$, alors $W = 0$!

d) Définition du travail d'une force $\vec{F}$ constante au cours d'un déplacement rectiligne $\vec{s}$

$$\boxed{W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

Exemple : $F = 3$ N; $s = 2$ m; $\alpha = 30°$.

Travail de $\vec{F}$: $W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 3 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} \cdot \cos 30° = 5{,}2$ J.

e) Unité S.I. : le joule (J)

Pour $\alpha = 0$, si $F = 1$ N et $s = 1$ m, alors $W(\vec{F}) = 1$ Nm = 1 joule = 1 J.

f) Rappel : produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Soient $\vec{u}\ (u_x, u_y)$ et $\vec{v}\ (v_x, v_y)$, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = u \cdot v \cdot \cos\alpha \qquad (\alpha = \text{angle entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v})}$$

g) Travail moteur et travail résistant

* $0° \leq \alpha \leq 90°$

$\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow W \geq 0$: **travail moteur**, car la force contribue au mouvement!

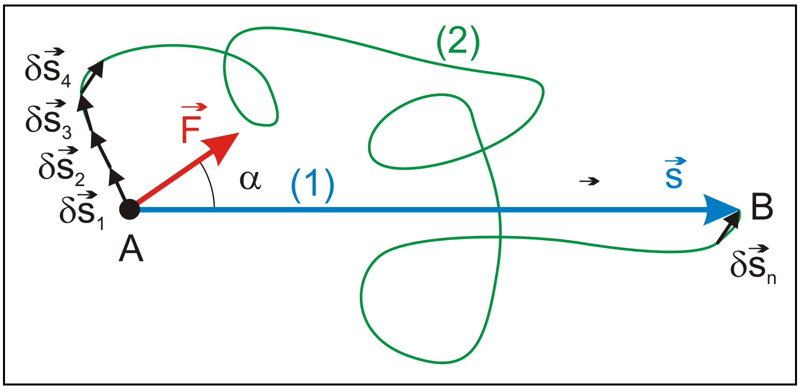
* $\alpha = 90°$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow W = 0$: la force ne travaille pas!

* $90° \leq \alpha \leq 180°$

$\cos\alpha \leq 0 \;\Rightarrow\; W \leq 0$: **travail résistant**, car la force s'oppose au mouvement!

2. Travail d'une force constante sur un chemin quelconque



Le corps se déplace de A vers B suivant 2 chemins différents : chemin rectiligne (1) et chemin curviligne quelconque (2). Il est soumis (entre autres) à la force constante $\vec{F}$.

Evaluons le travail de la force $\vec{F}$!

* suivant le chemin (1) : $W_1 = \vec{F}\cdot\vec{s}$

* suivant le chemin (2) : On subdivise le chemin en un très grand nombre n de très petits déplacements (déplacements élémentaires $\delta\vec{s}_1$, $\delta\vec{s}_2$, $\delta\vec{s}_3$, ..., $\delta\vec{s}_n$), et on calcule pour chacun de ces déplacements le travail. Le travail W_2 de la force $\vec{F}$ sur le chemin curviligne de A vers B est égal à la somme de ces travaux élémentaires.

$$W_2 = \vec{F}\cdot\delta\vec{s}_1 + \vec{F}\cdot\delta\vec{s}_2 + \ldots + \vec{F}\cdot\delta\vec{s}_n$$
$$= \vec{F}\cdot(\delta\vec{s}_1 + \delta\vec{s}_2 + \ldots + \delta\vec{s}_n)$$
$$W_2 = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

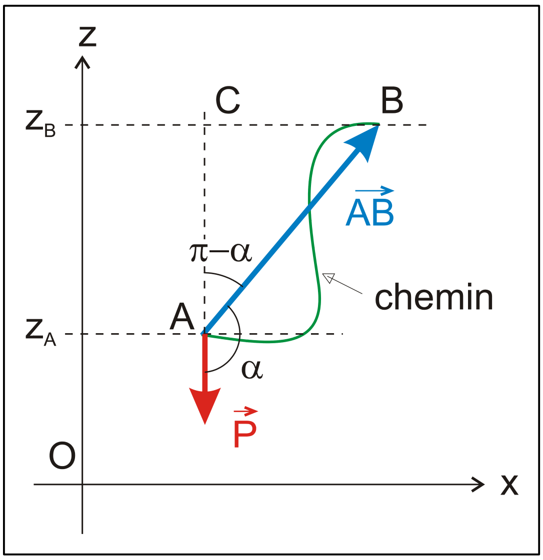
On obtient cette même expression quelle que soit la trajectoire curviligne !

Conclusion Le travail d'une force $\vec{F}$ constante est indépendant du chemin suivi entre le point de départ A et le point d'arrivée B :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = F\cdot AB\cdot\cos\alpha}$$

3. Exemple 1 : travail du poids d'un corps

a) Expression mathématique



* Corps transporté de A vers B vers le haut (par un opérateur, par exemple).

Considérons le repère d'axes Ox (axe horizontal) et Oz (axe vertical = axe des altitudes).

A = point initial = point de départ; B = point final = point d'arrivée.

Le poids $\vec{P}$ est constant au cours du déplacement, donc son travail W($\vec{P}$) est indépendant du chemin suivi, et :

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$$

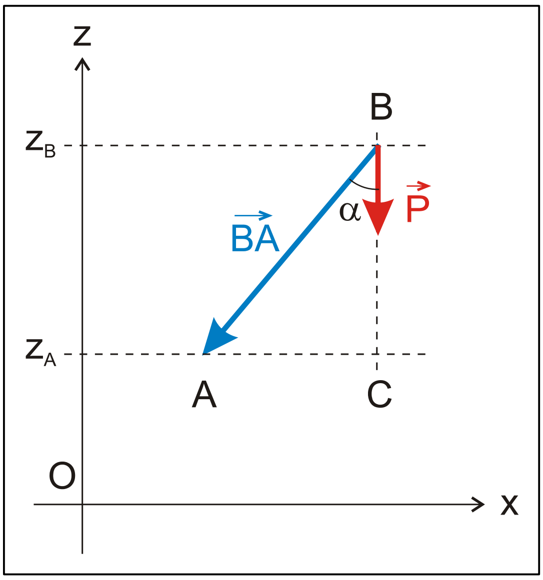
$$= P \cdot AB \cdot \cos\alpha.$$

$$= -P \cdot AB \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$= -P \cdot AC$$

Or $AC = z_B - z_A = z_f - z_i = \Delta z > 0$.

Donc : $W(\vec{P}) = -P \cdot \Delta z = -mg \cdot \Delta z < 0$ (travail résistant)



* Corps transporté de B vers A vers le bas.

$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{BA} = P \cdot BA \cdot \cos\alpha = P \cdot BC$

Or $BC = z_B - z_C = z_i - z_f = -\Delta z > 0$.

Donc : $W(\vec{P}) = -P \cdot \Delta z = -mg \cdot \Delta z > 0$ (travail moteur).

Conclusions

1. Quel que soit le déplacement, le travail du poids s'écrit :

$$\boxed{W(\vec{P}) = -P \cdot \Delta z = -mg \cdot \Delta z}$$

2. $W(\vec{P})$ sur chemin AB = $-W(\vec{P})$ sur chemin BA.

Remarque

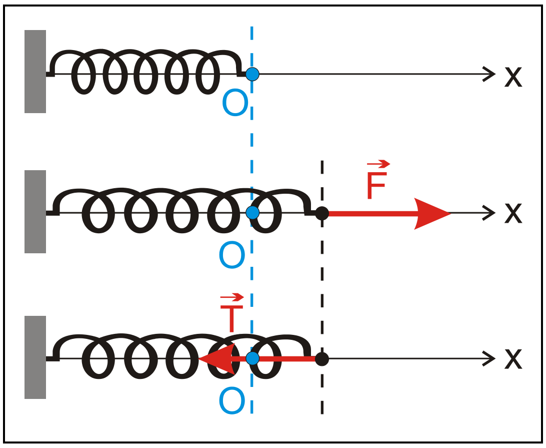
La force nécessaire pour soulever, en ligne droite et à vitesse constante, un corps de poids $\vec{P}$ est $\vec{F} = -\vec{P}$ (principe d'inertie!).

Cette force est exercée par un opérateur, par exemple. Ou bien elle est la résultante de plusieurs forces qui ont pour effet d'équilibrer le poids.

En tout cas : $W(\vec{F}) = -W(\vec{P}) = +mg\cdot\Delta z$

4. Exemple 2 : travail de la tension d'un ressort

a) Force nécessaire pour tendre un ressort



On définit un axe Ox des abscisses :

Origine O : extrémité libre du ressort non tendu;

Direction : parallèle à la direction de la tension $\vec{T}$;

Orientation tel que l'allongement $x > 0$.

$\vec{F}$: force exercée par un opérateur sur le ressort, nécessaire pour tendre le ressort d'une longueur x.

$\vec{T}$: tension du ressort = force exercée par le ressort tendu sur l'opérateur = force de rappel qui tend à ramener le ressort dans son état non tendu.

Principe des actions réciproques : $\vec{F} = -\vec{T}$

Intensités : $F = T$

Rappel de la loi de Hooke : $\boxed{T = kx}$ où k est la raideur du ressort.

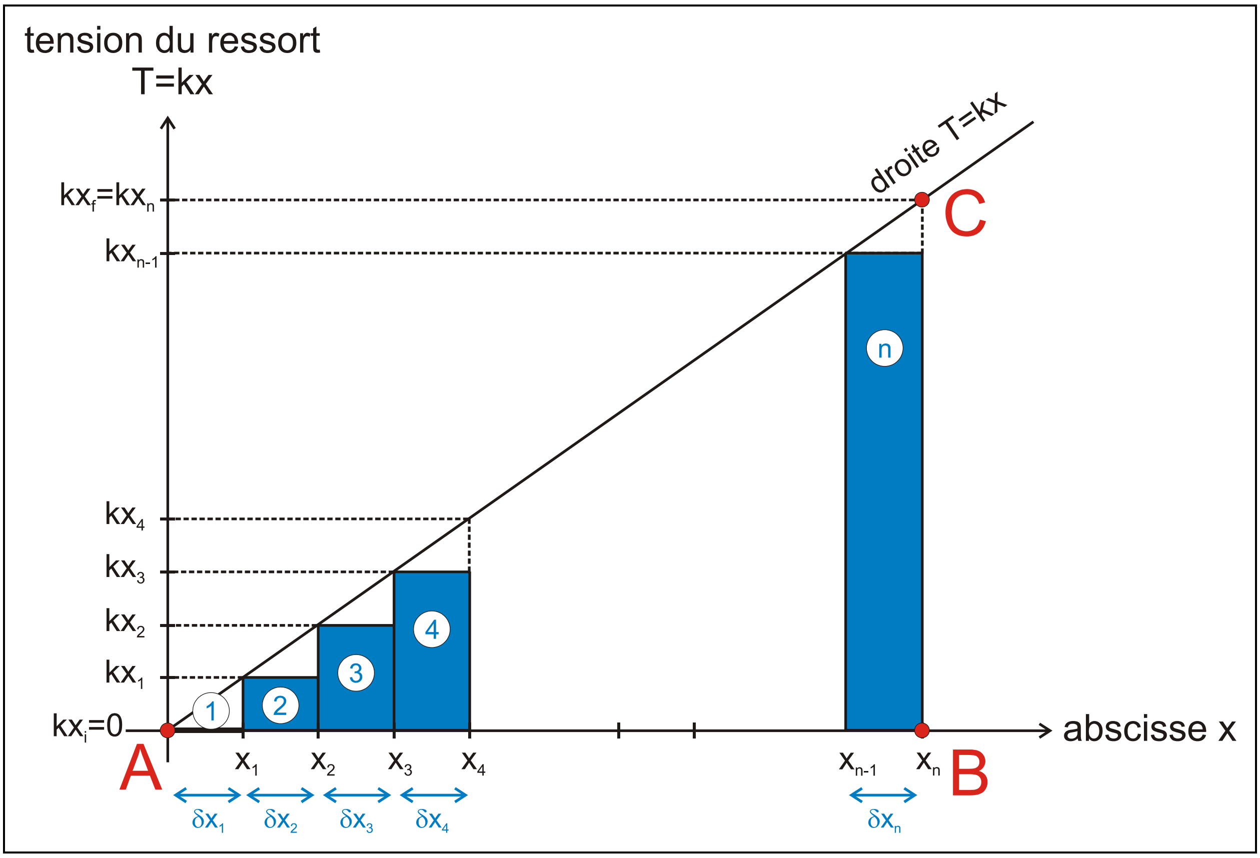
Unités S.I. : si $F = 1$ N et $x = 1$ m, alors $k = 1$ N/m.

Attention : $T \neq$ constant, T varie au cours du déplacement (T augmente si x augmente, T diminue si x diminue).

b) Expression mathématique du travail de la tension d'un ressort étiré à partir de son état non-déformé.

On tend le ressort de raideur k d'un point initial A d'abscisse $x_i = 0$ (origine O = point A), jusqu'à un point final B d'abscisse $x_f > 0$.

Afin de trouver le travail $W(\vec{T})$ utilisons la méthode graphique : Représentons l'intensité de la force de rappel du ressort T en fonction de l'abscisse x.



Comme la tension $\vec{T}$ n'est pas une force constante sur le déplacement de A vers B, la relation $W_{AB}(\vec{T}) = T \cdot AB$ n'est pas valable.

On subdivise alors le déplacement de A vers B en un très grand nombre n de très petits déplacements élémentaires δx_1, δx_2, δx_3, ... δx_n, de longueur identiques. Sur chacun de ces déplacements élémentaires la force T peut être considérée comme constante, de sorte que la formule du travail d'une force constante peut être appliquée ($W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{s} = -T \cdot s$) !

Ainsi sur le déplacement δx_1 de x_i (= 0) vers x_1, on considère que la tension reste constante de norme kx_i (= 0). Sur ce premier déplacement élémentaire, le travail élémentaire effectué vaut donc $\delta W_1 = -kx_i \cdot \delta x_1$ (= 0) et $|\delta W_1|$ correspond à l'aire (1).

Sur le deuxième déplacement élémentaire δx_2 de x_1 vers x_2, la tension sera de nouveau constante de norme kx_1 et le travail élémentaire effectué vaut donc $\delta W_2 = -kx_1 \cdot \delta x_2$ et $|\delta W_2|$ correspond à l'aire du rectangle (2).

Sur le troisième déplacement élémentaire δx_3 de x_2 vers x_3, la tension sera de nouveau constante de norme kx_2 et le travail élémentaire effectué vaut donc $\delta W_3 = -kx_2 \cdot \delta x_3$ et $\left|\delta W_3\right|$ correspond à l'aire du rectangle (3).

On répète ceci pour les n déplacements.

Finalement sur le dernier déplacement élémentaire δx_n de x_{n-1} vers $x_n = x_f$, la tension sera de nouveau constante de norme kx_f et le travail élémentaire effectué vaut donc $\delta W_n = -kx_{n-1} \cdot \delta x_n$ et $\left|\delta W_n\right|$ et correspond à l'aire du rectangle (n).

Le travail total de la tension sur le déplacement de x_i vers x_f est égal à la somme de tous les travaux élémentaires: $W_{AB}(\vec{T}) = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W3 + \ldots + \delta W_n$. La valeur absolue de ce travail correspond donc à la somme des aires des rectangles (1) jusqu'à (n).

Pourtant ce processus n'est valable que si le déplacement δx est très petit et, à la limite, tend vers zéro, ce qui veut dire que n tend vers l'infini.

Dans ce cas, la somme des aires des rectangles tend vers l'aire du triangle ABC.

Ainsi on obtient $\left|W_{AB}(\vec{T})\right|$ = aire du triangle ABC :

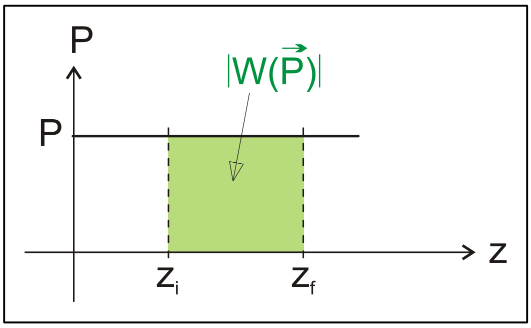
$$\left|W_{AB}\left(\vec{T}\right)\right| = \frac{kx_f \cdot x_f}{2} = \frac{1}{2} k \cdot x_f^2$$

Comme nous additionnons des travaux élémentaires résistants, le travail total de la tension est résistant :

$$W_{AB}\left(\vec{T}\right) = -\frac{1}{2} k \cdot x_f^2$$

Remarque : La méthode est générale. La valeur absolue du travail d'une force correspond à l'aire en dessous de la courbe représentant l'intensité de la force en fonction du déplacement parallèlement à la force.

De même : représentation graphique du travail du poids $\vec{P}$:



On représente P = f(z)! Comme P est constant, la représentation de P = f(z) fournit une droite horizontale.

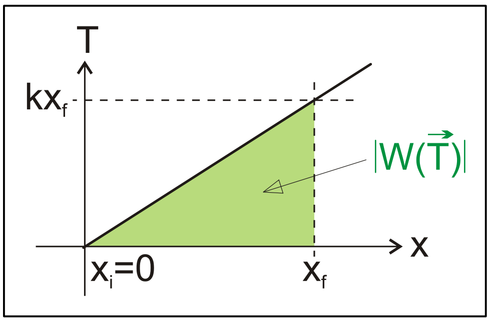
Le déplacement se fait de z_i à z_f.

$\left|W(\vec{P})\right| = mg \cdot \Delta z$ correspond à l'aire en-dessous de la courbe P = f(z) et l'axe Oz, prise entre le point initial et le point final !

c) Expression mathématique générale du travail de la tension d'un ressort

* On tend le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i = 0$ (origine O), jusqu'à un point final d'abscisse $x_f > 0$.

C'est la situation du paragraphe précédent !



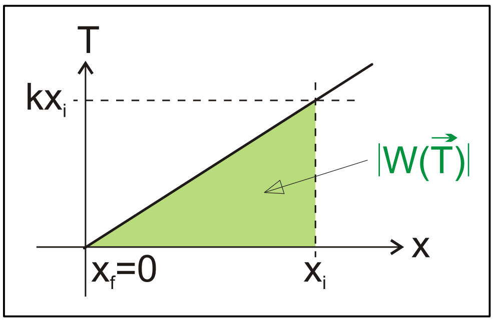
L'aire entre la courbe T = f(x) et l'axe Ox pris entre x_i et x_f est égal à $\left|W(\vec{T})\right|$!

$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_f \cdot x_f}{2} = \frac{1}{2}k \cdot x_f^2$$

Or $W(\vec{T})$ résistant $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) < 0$.

Donc : $W(\vec{T}) = -\frac{1}{2}k \cdot x_f^2$

* On relâche le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f = 0$ (origine O).

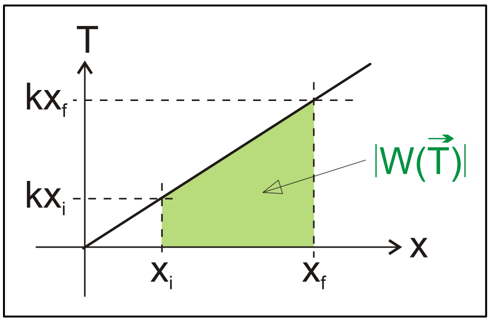


$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_i \cdot x_i}{2} = \frac{1}{2}k \cdot x_i^2$$

Or $W(\vec{T})$ moteur $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) > 0$, donc :

$$W(\vec{T}) = \frac{1}{2}k \cdot x_i^2$$

* On tend le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f > x_i$.

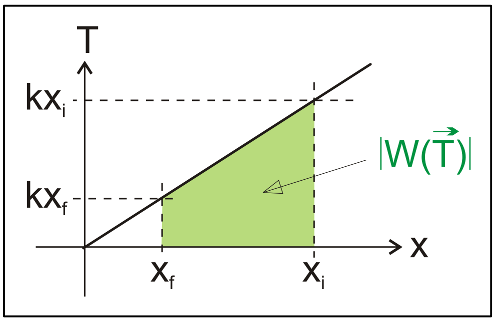


$$\left|W(\vec{T})\right| = \frac{kx_f \cdot x_f}{2} - \frac{kx_i \cdot x_i}{2} = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Or $W(\vec{T})$ résistant $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) < 0$, donc :

$$W(\vec{T}) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

* On relâche le ressort d'un point initial d'abscisse $x_i \neq 0$, jusqu'à un point final d'abscisse $x_f < x_i$ ($x_f \neq 0$).



$$\left|W\left(\vec{T}\right)\right| = \frac{kx_i \cdot x_i}{2} - \frac{kx_f \cdot x_f}{2} = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

Or $W(\vec{T})$ moteur $\Rightarrow$ $W(\vec{T}) > 0$, donc :

$$W\left(\vec{T}\right) = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Conclusion

Quel soit le déplacement de l'extrémité d'un ressort (et donc de sa tension), le travail de la tension du ressort s'écrit :

$$\boxed{W\left(\vec{T}\right) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -\frac{1}{2}k\Delta\left(x^2\right)}$$

c) Travail de la force nécessaire pour tendre le ressort

Cette force est la force $\vec{F} = -\vec{T}$.

Donc : $W\left(\vec{F}\right) = -W\left(\vec{T}\right) = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}k\Delta\left(x^2\right)$

5. Puissance *P* d'une force constante

a) Définition

* P = travail effectué par la force par seconde.
Donc, si une force effectue un travail W pendant la durée Δt, sa puissance P vaut :

$$\boxed{P = \frac{W}{\Delta t}}$$

* Si W < 0, alors P < 0; mais généralement on ne s'intéresse qu'à la valeur absolue de la puissance.

b) Unités S.I. : le watt (W)

Si W = 1 J et Δt = 1 s, alors P = 1 watt = 1 W.

c) Relation entre puissance et vitesse de déplacement du corps

Il faut que la force $\vec{F}$ soit constante et que la vitesse $\vec{v}$ de déplacement soit constante (mouvement rectiligne uniforme) !

Dans ce cas : $W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$ et : $s = v \cdot \Delta t$.

La puissance P de la force s'écrit alors : $P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot s \cdot \cos\alpha}{\Delta t} = \frac{F \cdot v \cdot \Delta t \cdot \cos\alpha}{\Delta t}$

$$\boxed{P = F \cdot v \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

d) Autre unité pour le travail : le kilowatt-heure (kWh)

On a : $W = P \cdot \Delta t$.

* Si P = 1 kW et Δt = 1 h, alors W = 1 kW·1 h = 1 kWh.

* 1 kWh = 1000 W·3600 s = $3{,}6 \cdot 10^6$ J

$$1\,\mathrm{J} = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^6}\,\mathrm{kWh}$$